Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen 1 – Sommersemester 2019
Institut für Theoretische Informatik
http://verialg.iti.kit.edu
Prof. Dr. Carsten Sinz – Markus Iser

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Allgemeine Hinweise

- Als Hilfsmittel ist nur *ein* DIN-A4-Blatt mit Ihren *handschriftlichen* Notizen zugelassen.
- Schreiben Sie auf *alle* Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Die durch die Übungsblätter gewonnenen Bonuspunkte werden erst nach Erreichen der zum Bestehen der Klausur nötigen Punktzahl hinzugezählt. Die Anzahl der Bonuspunkte entscheidet nicht über das Bestehen.
- **Die Klausur nur mit Erlaubnis umdrehen!**

Übersicht Punkteverteilung

Die Klausur besteht aus drei Teilen, in denen Sie jeweils 20 Punkte erreichen können.

Aufgaben	Teil A					Teil B						Teil C		
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	1	2	3
60 Punkte	20					20						20		
	5	8	4	1	2	4	2	4	3	4	3	6	6	8

A Gemischte Kleinaufgaben (20 Punkte)

A.1 Begriffe (5 Punkte)

A.1.1 Binäre Min-Heaps (1 Punkt)

Wie lautet die Heap-Eigenschaft für einen Min-Heap?

Lösung

Die Schlüssel beider Kinder sind immer größer oder gleich dem Schlüssel ihrer Eltern.

A.1.2 Hashfunktionen (1 Punkt)

Sei $\mathcal{H}$ eine nicht-leere Menge von Funktionen $h : U \to \{1, \ldots, m\}$. Was muss gelten, damit $\mathcal{H}$ eine universelle Familie von Hash-Funktionen ist?

Lösung

Für jedes Schlüsselpaar $k, j \in U$ ist bei zufällig ausgewähltem h aus $\mathcal{H}$ die Kollisionswahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[h(k) = h(j)] \leq \frac{1}{m}$.

A.1.3 Graphen (1 Punkt)

Welche beiden Eigenschaften machen einen beliebigen Graphen zu einem DAG?

Lösung

Ein DAG ist gerichtet und azyklisch.

A.1.4 Minimale Spannbäume (2 Punkte)

Definieren Sie die Kreis- und die Schnitt-Eigenschaft, welche zur Berechnung von minimalen Spannbäumen verwendet werden.

Lösung

- Kreis-Eigenschaft: Von jedem Kreis in einem Graphen kann die schwerste Kante nicht in einem MST verwendet werden.
- Schnitt-Eigenschaft: Von jedem beliebigen Schnitt in einem Graphen kann die leichteste Schnittkante in einem MST verwendet werden.

A.2 Asymptotische Laufzeit (8 Punkte)

A.2.1 O-Kalkül (2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: $(\log_5 n)^n \in \mathcal{O}\big(n^{\log_3 n}\big)$.

Lösung

Die Aussage gilt nicht, wie durch Umformen offensichtlich wird.

$$\begin{aligned} & (\log_5 n)^n \in \mathcal{O}\big(n^{\log_3 n}\big) \\ \Leftrightarrow \quad & \log_3\big((\log_5 n)^n\big) \in \mathcal{O}\big(\log_3\big(n^{\log_3 n}\big)\big) \\ \Leftrightarrow \quad & n \cdot \log_3\big((\log_5 n)\big) \in \mathcal{O}(\log_3(n) \cdot \log_3(n)) \\ \Leftrightarrow \quad & n \cdot \log_3\big((\log_5 n)\big) \in \mathcal{O}\big(\log_3(n)^2\big) \end{aligned}$$

A.2.2 Rekurrenzgleichung (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Rekurrenzgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^2 & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie für $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$T(n) = n^2 \cdot \big(\log_2(n) + 1\big)$$

Lösung

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \cdot (\log_2(1) + 1) = 1 && \text{(IA)} \\ T(2n) &= 4 \cdot T\left(\frac{2n}{2}\right) + 4n^2 && \text{(IS)} \\ &\overset{IV}{=} 4n^2 \cdot \big(\log_2\left(\frac{2n}{2}\right) + 1\big) + 4n^2 \\ &= 4n^2 \cdot \big(\log_2(2n) - \log_2(2) + 1\big) + 4n^2 \\ &= 4n^2 \cdot \big(\log_2(2n)\big) + 4n^2 \\ &= (2n)^2 \cdot \big(\log_2(2n) + 1\big) \end{aligned}$$

A.2.3 Mastertheorem (4 Punkte)

Gegeben seien zwei rekursive Algorithmen A und B, wobei B in jedem Rekursionsschritt nicht nur sich selbst sondern auch A aufruft. Die Laufzeiten von A und B seien durch die Rekurrenzen T_A und T_B beschrieben mit $n = 5^k$ und $k \in \mathbb{N}$.

Geben Sie alle ganzzahligen Lösungen für $a, b > 0$ an, für die laut Mastertheorem aus der Vorlesung die Laufzeit von B in $\Theta(n \log n)$ liegt, und begründen Sie Ihre Wahl von a und b kurz.

$$T_A(n) = \begin{cases} 1024 & \text{für } n = 1 \\ 5n + a \cdot T_A(\frac{n}{5}) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_B(n) = \begin{cases} 256 & \text{für } n = 1 \\ T_A(n) + b \cdot T_B(\frac{n}{5}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung

Damit $T_B(n) \in \mathcal{O}(n \log n)$ liegt, muss $T_A(n) \in \mathcal{O}(n)$ liegen. Das gilt für alle $a < 5$. Weiterhin muss für $T_B(n)$ gelten, dass $b = 5$. Also erfüllen die folgenden Lösungen die Bedingung:

$$\{(0, 5), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$

A.3 Union-Find (4 Punkte)

Welche beiden Beschleunigungstechniken wurden in der Vorlesung für die Union-Find-Datenstruktur eingeführt? Nennen und beschreiben Sie diese kurz.

Lösung

- Pfadkompression: Nach jedem Find werden alle besuchten Knoten direkt unter die Wurzel gehängt.
- Union-by-rank: In jedem Knoten wird die Baumgröße gespeichert, so dass bei jedem Union der jeweils der kleinere Baum unter den größeren gehängt werden kann.

A.4 Inversionen (1 Punkt)

Bestimmen Sie die Anzahl der Inversionen in der folgenden Liste,[1] und nennen Sie ein Beispiel für einen Verwendungszweck dieses Maßes.

$$(87, 2, 3, 45, 8, 23, 43, 65)$$

[1] Eine Inversion ist ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $a[i] > a[j]$

Lösung

Die Liste enthält 10 Inversionen. Mit Inversionen kann die Laufzeit von manchen Sortieralgorithmen (z.B. bei Insertion Sort) genauer bestimmt werden.

A.5 Wächter (2 Punkte)

Erklären Sie, welchen Zweck Sentinel-Elemente bei Suchalgorithmen erfüllen. Haben Sentinels einen Einfluss auf die *asymptotische* Laufzeit eines Algorithmus? Begründen Sie kurz.

Lösung

Mit Sentinels kann man die *Anzahl der Vergleiche* in einer Schleife um einen *additive Konstante* reduzieren, daher wirken Sie sich *nicht auf die asymptotische Laufzeit* aus.

B Algorithmen Ausführen (20 Punkte)

B.1 Dynamische Programmierung (4 Punkte)

Die Editierdistanz (auch Levenshtein-Distanz genannt) zwischen zwei Zeichenketten ist die minimale Anzahl von Einfüge-, Lösch- und Ersetz-Operationen von Zeichen, die benötigt wird, um eine Zeichenkette in eine andere umzuwandeln. Die Editierdistanz zwischen zwei Worten u und v kann mittels dynamischer Programmierung berechnet werden. Wir verwenden eine Matrix D für Teillösungen, wobei $D_{i,j}$ die Levenshtein-Distanz der Präfixe $u_{0...i}$ und $v_{0...j}$ angibt. Die erste Zeile ($i = 0$) und Spalte ($j = 0$) von D sollen wie folgt initialisiert werden:[2]

$$\begin{aligned} D_{i,0} &= i, \text{für } 0 \leq i \leq |u| \\ D_{0,j} &= j, \text{für } 1 \leq j \leq |v| \end{aligned} \qquad \text{(Initialisierungsschritte)}$$

Die Rekurrenzschritte, die beim Erstellen der Matrix verwendet werden, sind für $1 \leq i \leq |u|, 1 \leq j \leq |v|$ wie folgt gegeben:

$$D_{i,j} = \min \begin{cases} 0 + D_{i-1,j-1} & \text{falls } u_i = v_j \\ 1 + D_{i-1,j-1} & \text{Ersetzung} \\ 1 + D_{i,j-1} & \text{Einfügung} \\ 1 + D_{i-1,j} & \text{Löschung} \end{cases} \qquad \text{(Rekurrenzschritte)}$$

Berechnen Sie die Editierdistanz der beiden Worte “Hausboot” und “ausbooten”, indem Sie rechts die bereits initialisierte Matrix D ausfüllen. Markieren Sie anschließend den Pfad in der Matrix, an dem Sie eine minimale Folge von Editierschritten ablesen können.

Lösung

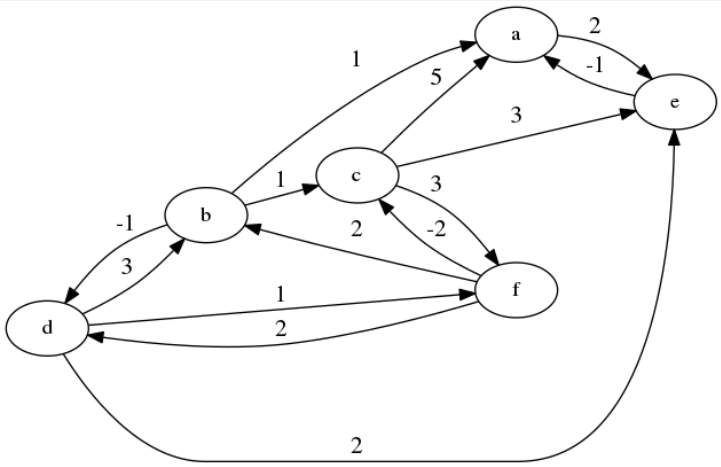
	ϵ	a	u	s	b	o	o	t	e	n
ϵ	**0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
H	**1**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9
u	3	2	**1**	2	3	4	5	6	7	8
s	4	3	2	**1**	2	3	4	5	6	7
b	5	4	3	2	**1**	2	3	4	5	6
o	6	5	4	3	2	**1**	2	3	4	5
o	7	6	5	4	3	2	**1**	2	3	4
t	8	7	6	5	4	3	2	**1**	**2**	**3**

[2] Hierbei bezeichne $|w|$ die Länge der Zeichenkette w.

B.2 Kürzeste-Wege-Algorithmen (2 Punkte)

Berechnen Sie in dem gegebenen Graphen alle kürzesten Wege, die bei Knoten c beginnen, und tragen Sie die kürzesten Distanzen zu c in die dafür vorgesehene Tabelle ein. Benutzen Sie dabei einen der beiden in der Vorlesung vorgestellten Algorithmen.

Lösung



Knoten	Distanz von c
a	2
b	5
d	4
e	3
f	3

B.3 Sortieren (4 Punkte)

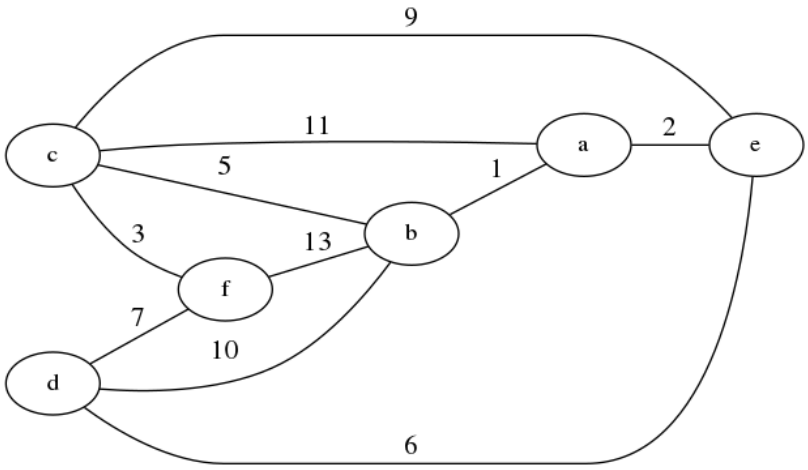
Sortieren Sie die Folge $(17, 9, 3, 76, 15, 23, 107, 90)$ aufsteigend mit Mergesort. Geben Sie dabei die einzelnen merge-Schritte in ihrer *Ausführungsreihenfolge* an, und notieren Sie dabei für jedes $\mathsf{merge}(e_1, e_2) \rightarrow a$ in der Tabelle unten sowohl die Eingabetupel e_1 und e_2, als auch das Ausgabetupel a.

Lösung

	e_1	e_2	a
1.	(17)	(9)	$(9, 17)$
2.	(3)	(76)	$(3, 76)$
3.	$(9, 17)$	$(3, 76)$	$(3, 9, 17, 76)$
4.	(15)	(23)	$(15, 23)$
5.	(107)	(90)	$(90, 107)$
6.	$(15, 23)$	$(90, 107)$	$(15, 23, 90, 107)$
7.	$(3, 9, 17, 76)$	$(15, 23, 90, 107)$	$(3, 9, 15, 17, 23, 76, 90, 107)$

B.4 Minimale Spannbäume (3 Punkte)

Berechnen Sie einen minimalen Spannbaum (MST) für den unten gegebenen Graphen mit dem Algorithmus von Jarnik und Prim. Verwenden Sie Knoten c als Startknoten. Weisen Sie dabei in der Tabelle rechts jeder Baumkante eine Nummer zu, die angibt beim wievielten Schnitt sie dem MST hinzugefügt wurde.



Lösung

$\{a, e\}$	4
$\{a, c\}$	
$\{a, b\}$	3
$\{b, c\}$	2
$\{b, d\}$	
$\{b, f\}$	
$\{c, e\}$	
$\{c, f\}$	1
$\{d, e\}$	5
$\{d, f\}$	

B.5 Min-Heaps (4 Punkte)

Gegeben ist ein Array A mit Werten wie in der ersten Zeile der unten stehenden Tabelle. Verwenden Sie *buildHeap* aus der Vorlesung, um einen binären Heap mit den Zahlen nachfolgender Tabelle aufzubauen. Führen Sie anschließend einmal *deleteMin* und danach *insert 4* aus. Notieren Sie den Zustand des Heaps nach jeder Ausführung.

Lösung

A	10	24	13	39	40	45	36	17	25	89
buildHeap()	10	17	13	24	40	45	36	39	25	89
deleteMin()	13	17	36	24	40	45	89	39	25	
insert(4)	4	13	36	24	17	45	89	39	25	40

B.6 Hashing mit Linear Probing (3 Punkte)

Folgende Hashtabelle sei mit der Hashfunktion $f(x) = x \bmod 13$ erstellt worden. Führen Sie die unten angegebenen Operationen aus und geben Sie jeweils den Zustand der Hashtabelle nach Ausführen der Operation an.

Lösung

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wert	13	1	15	0	3	30	19	14	20	9	7		
delete(3)	13	1	15	0	30	14	19	20	7	9			
delete(0)	13	1	15	14	30		19	20	7	9			
insert(6)	13	1	15	14	30		19	20	7	9	6		

C Algorithmenentwurf (20 Punkte)

C.1 Anagramme (6 Punkte)

Gegeben seien ein Wort W und ein String S über einem fixen Alphabet Σ der konstanten Größe k. Finden Sie alle Indizes i, an denen der Teilstring $S[i : i+|W|]$ ein Anagramm von W ist.[3] Als Anagramm wird eine Buchstabenfolge bezeichnet, die aus einer anderen Buchstabenfolge allein durch Umstellung (Permutation) der Buchstaben gebildet ist. Sie dürfen annehmen, dass jedes Zeichen z des Alphabets mit einer ganzen Zahl $0 \leq z < |\Sigma|$ identifiziert werden kann.

Beispiel: Gegeben seien das Wort W=“ab” und der String S=“xbyaba”, dann lautet die Anagramm-Indexfolge A von W in S wie folgt:

$$A = \{4, 5\} \ .$$

Geben Sie einen Algorithmus an, der das Anagramm-Index-Problem mit einer Worst-Case-Laufzeit von $\mathcal{O}(|S|)$ löst und begründen Sie die Laufzeit. Für einen korrekten Algorithmus mit schlechterer Lauftzeit aber vorhandener Laufzeitbegründung erhalten Sie noch maximal 3 Punkte.

Lösung

```
I = ()                          // matching index sequence (result)
if |W| > |S| then
   print(I); return
hP = ⟨0,...,0⟩: Array[0..k − 1] of Integer          // histogram for pattern
hT = ⟨0,...,0⟩: Array[0..k − 1] of Integer          // histogram for text
for i in 1..|W| do
   hP[W[i]]++                   // initialize histogram for pattern
   hT[S[i]]++                   // initialize histogram for first |W| characters of text
if histogramsEqual(hP, hT) then I.append(1)
for p in 2..|S| − |W| + 1 do    // move window of size |W| over text
   hT[S[p − 1]]--
   hT[S[p + |W| − 1]]++
   if histogramsEqual(hP, hT) then I.append(p)
print(I)

Function histogramsEqual(h1, h2): Bool
   for i in 0..k − 1 do
      if h1[i] ≠ h2[i] then return false
   return true
```

`histogramsEqual` hat Laufzeit $\mathcal{O}(1)$, da k konstant. Falls $|W| > |S|$ terminiert der Algorithmus in $\mathcal{O}(1)$, ansonsten bestimmt die zweite Schleife die Laufzeit mit $\mathcal{O}(|S|)$.

[3] Anmerkungen zur Notation: Sei S ein String, dann bezeichnet S[i] den Buchstaben an Stelle i und S[i:j] denjenigen zusammenhängenden Teilstring in S der mit S[i] beginnt und mit S[j-1] endet. Das erste Zeichen im String S ist S[1].

C.2 Die fehlende Zahl (6 Punkte)

Gegeben sei ein Array $A[1..n]$ von n beliebigen ganzen Zahlen. Gesucht ist die kleinste Zahl $z > 0$, die nicht in A vorkommt. Zahlen können auch mehrfach in A vorkommen, d.h. es kann Duplikate geben. Der hier zu entwickelnde Algorithmus soll das Problem *in $\mathcal{O}(n)$ und mit nur konstantem zusätzlichem Speicherplatz* lösen. Das Array A darf verändert werden. Zeigen Sie für eine Lösung, dass Ihr Algorithmus diese Bedingungen einhält.

C.2.1 Eingeschränkter Fall (4 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe unter der Annahme, dass in A nur ganze Zahlen z zwischen 1 und n vorkommen (d.h. $1 \leq z \leq n$).

Lösung

```
for i in 1..n do
    v = A[i]
    while A[v] ≠ v do
        e = A[v]
        A[v] = v
        v = e
r = n + 1
for i in 1..n do
    if A[i] ≠ i then
        r = i; break
print r
```

Idee: Bewege Element mit Wert x an Indexposition x um anzuzeigen, dass x in A vorkommt.

Konstanter zusätzlicher Speicher: klar

$\mathcal{O}(n)$: Bei jeder Iteration der `while`-Schleife nimmt die Anzahl der Indizes i mit $A[i] \neq i$ um eins ab. Insgesamt kann es daher maximal n Durchläufe der inneren Schleife geben.

Alternative Idee: Negiere Zahl an Index x um anzuzeigen, dass x in A vorkommt.

C.2.2 Allgemeiner Fall (2 Punkte)

Lösen Sie die Aufgabe für den allgemeinen Fall, dass also in A beliebige ganze Zahlen auftreten dürfen.

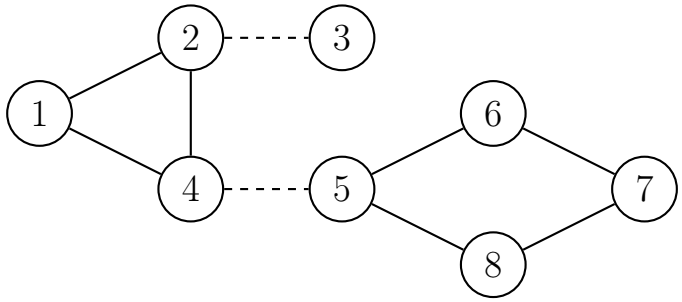
Lösung

Es ist ausreichend, in obigem Algorithmus sicherzustellen, dass die Array-Grenzen bei Zugriffen eingehalten werden. D.h. Änderung von `while` $A[v] \neq v$ `do` in `while` $v \geq 1$ `&&` $v \leq n$ `&&` $A[v] \neq v$ `do` erlaubt die Behandlung des allgemeinen Falls (*short-circuit-evaluation* angenommen).

C.3 Brücken in Graphen (8 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender Graph, d.h., G sei ungerichtet und enthalte keine Mehrfachkanten oder Schleifen (Kanten, die einen Knoten mit sich selbst verbinden). Eine *Brücke* $b \in E$ ist eine Kante, deren Löschen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in G erhöht.

Beispiel: Im unten angegebenen Graph sind die gestrichelten Kanten Brücken.



a) **(1 Punkt)** Zeigen Sie: Eine Kante $e \in E$ ist eine Brücke genau dann, wenn die Kante e nicht auf einem einfachen Zyklus von G liegt. (Ein Weg $(v_0, \ldots, v_k)$ ist ein einfacher Zyklus, wenn $k > 2$, $v_0 = v_k$ und $v_1, \ldots, v_k$ paarweise verschieden sind.)

Lösung

$\Rightarrow$: Sei e eine Brücke und angenommen, e liege auf einem Kreis. Dann sind nach Entfernen von e immer noch alle Knoten auf dem (ehemaligen) Kreis, und damit alle Knoten des Graphen, untereinander erreichbar.
$\Leftarrow$: Sei $e = (u, v)$ eine Kante, die auf keinem einfachen Zyklus liegt. Dann ist diese Kante die einzige Möglichkeit von u aus erreichbare Knoten ausgehend von v zu erreichen. Nach Entfernen von e ist dies nicht mehr möglich, womit der Graph in zwei Komponenten zerfällt.

Brücken können über eine Modifikation der Tiefensuche (DFS) für ungerichtete Graphen berechnet werden. Sei T_G der DFS-Baum zu einer Tiefensuche von G und $d[v]$ die zugehörige DFS-Nummerierung der Knoten $v \in V$. Wir definieren *$low[v]$ als den kleinsten Wert $d[w]$, ermittelt über alle Rückwärtskanten (u, w) der Tiefensuche, für die u im DFS-Baum von v aus erreichbar ist und für die $d[w] < d[v]$ gilt.* Falls keine solche Rückwärtskante existiert, sei $low[v] = d[v]$.

$low[v]$ kann wie folgt berechnet werden:

$$low[v] = \min \begin{cases} d[v] & \\ d[w] & \text{für alle } w, \text{ für die } (v,w) \text{ eine Rückwärtskante ist} \\ low[w] & \text{für alle } w, \text{ für die } (v,w) \text{ eine Baumkante ist} \end{cases}$$

b) **(1 Punkt)** Geben Sie für den oben angeführten Beispielgraph die Werte $low[v]$ für alle $v \in V$ an. Die Nummern in den Knoten sollen dabei als Werte der DFS-Nummerierung interpretiert werden. Sie können Ihre Lösung direkt im Graph oben eintragen.

Lösung

v	1	2	3	4	5	6	7	8
$low[v]$	1	1	3	1	5	5	5	5

c) **(2 Punkte)** Begründen Sie, warum *nur Kanten des DFS-Baums* Brücken in G sein können. Geben Sie außerdem eine Bedingung (unter Verwendung der Arrays d und low) dafür an, dass eine Kante (u,v) des DFS-Baums Brücke von G ist.

Lösung

Rückwärtskanten bilden immer einen Kreis auf ungerichteten Graphen. Außerdem gibt es keine Vorwärts- und Querkanten in ungerichteten Graphen. Daher können nur Baumkanten Brücken sein.
Bedingung: $e = (u,v)$ Brücke gdw. $low[v] > d[u]$. Alternative Lösung: $e = (u,v)$ Brücke gdw. $low[v] = d[v]$.

d) **(4 Punkte)** Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen einfachen, zusammenhängenden Graph G sämtliche Brücken berechnet. Verwenden Sie dazu das unten angegebene Tiefensuchschema und ergänzen Sie Definitionen für die Funktionen `init`, `root`(s), `traverseNonTreeEdge`(u,v,w), `traverseTreeEdge`(v,w) und `backtrack`(u,v). Sie können hierbei annehmen, dass eine ungerichtete Kante des Graphen G durch zwei gerichtete Kanten dargestellt ist.

Tiefensuchschema:

```
unmark all nodes
init
foreach s ∈ V do
   if s is not marked then
      mark s
      root(s)
      DFS(s, s)
```

```
Procedure DFS(u, v: NodeId)
   foreach (v, w) ∈ E do
      if w is marked then
         traverseNonTreeEdge(u, v, w)
      else
         traverseTreeEdge(v, w)
         mark w
         DFS(v, w)
   backtrack(u, v)
```

Lösung

```
init:
   dfsPos = 1
   d = ⟨⊥, ..., ⊥⟩: Array[1..|V|]
   low = ⟨⊥, ..., ⊥⟩: Array[1..|V|]

root(s):
   d[s] = low[s] = dfsPos++

traverseNonTreeEdge(u, v, w):
   if (w ≠ u) then low[v] = min(low[v], d[w])

traverseTreeEdge(v, w):
   d[w] = low[w] = dfsPos++

backtrack(u, v):
   low[u] = min(low[u], low[v])
   if (low[v] > d[u]) then print "(u, v) is bridge"
      // alternative: if (u ≠ v && low[v] = d[v]) ...
```